Κλασσική Μηχανική
16/2/16
Θ. Χωρίκης
Γραφείο 313Ε
horikis@uoi.gr

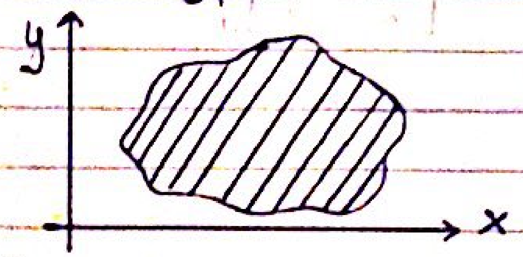
Στερεό Σώμα

Βασικό χαρακτηριστικό των στερεών σωμάτων είναι η ακαμψία. Δηλαδή αλλάζουν ελάχιστα κάτω από αλλαγές πίεσης, θερμοκρασίας κ.λ.π. Ένα τέλειο σώμα θεωρούμε ότι διατηρεί σταθερό το μέγεθος και το σχήμα του.

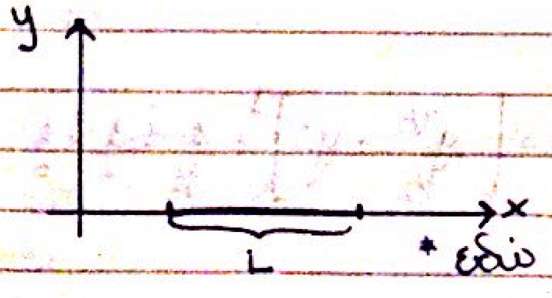
Ορισμός

Ένα σύστημα σωματιδίων όπου η απόσταση μεταξύ δύο τυχαίων σωματιδίων δεν αλλάζει, ανεξάρτητα από τις δυνάμεις που δρουν πάνω του ονομάζεται στερεό σώμα. Η πρώτη αντίληψη που έχουμε για ένα στερεό σώμα, ανεξάρτητα από τη διάσταση που ανήκει για παράδειγμα 1, 2, 3 διαστάσεις είναι ο χώρος ή το μήκος ή το εμβαδόν που καταλαμβάνει.

Παράδειγμα



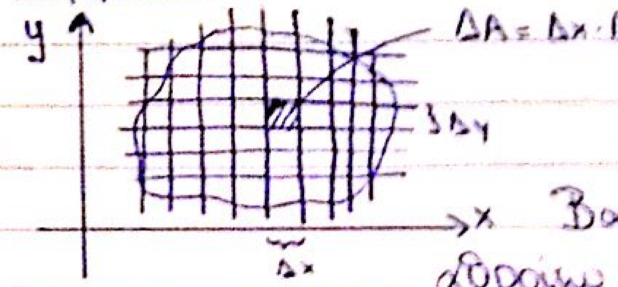
* Το πρώτο πράγμα που βλέπω είναι το εμβαδό.



* εδώ το μήκος

* Στις 3 διαστάσεις τον όγκο.

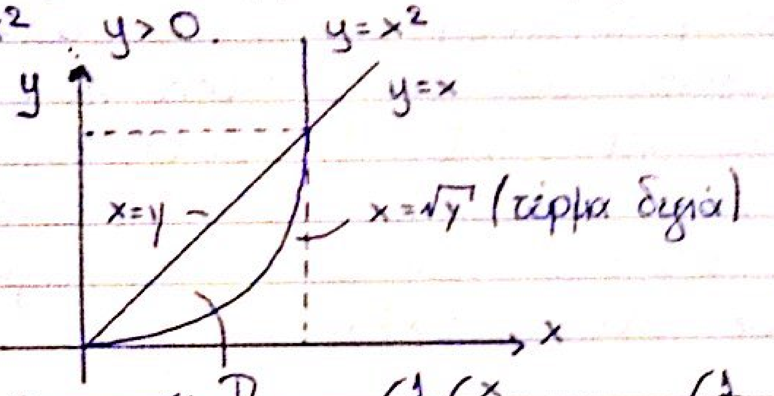
Εμβαδά



Να βρεθεί το εμβαδό αυτού του χωρίου. Βασική ιδέα, αρχίζω και το κόβω. Τα αθροίζω, καθώς έρχομαι προς τα άκρα αρχίζω να έχω πρόβλημα. Τότε αρχίζω και το μικραίνω, ώστε να μην έχω καθόλου μεταβολές, ουσιαστικά θα έχω σημείο. Συνολικό εμβαδό ενός χωρίου θα είναι: $A = \iint_P dA$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδό που περιβάλλεται από τις καμπύλες $y=x$, $y=x^2$, $y>0$.



1ο σχεδιάζω
2ο τα σημεία τομής κάθετες ως προς τους άξονες
3ο γράφω το ολοκλήρωμα

$$A = \iint_D dA = \iint_D dy\,dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

[1](Νούμερα στο εξωτερικό, τα σημεία τομής)

$$\left\{\begin{array}{l} y = x \\ y = x^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 0, 1 \\ y > 0. \end{array}$$

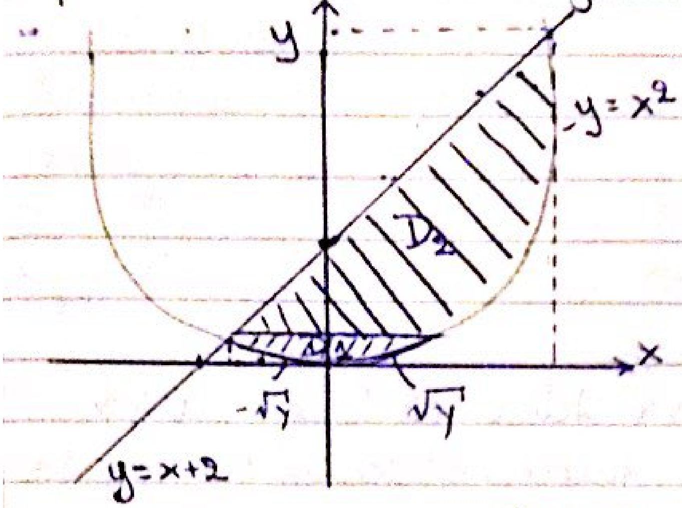
\+ Αλλάζω τα σημεία ολοκλήρωσης

$$A = \iint_D dA = \iint_D dx\,dy = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx\,dy = \int_0^1 (\sqrt{y} - y)\,dy = \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3/2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

*(αντί για πάνω-κάτω, δεξιά-αριστερά // καθισμένος στον y και βλέπω μπροστά)

Παρατήρηση

Στην αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί. __πχ__ Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $y=x+2$, $y=x^2$.



Σημεία τομής

$$\begin{cases} y=x+2 \\ y=x^2 \end{cases} \quad x^2-x-2=0 \quad \begin{matrix} x=-1 & y=1 \\ x=2 & y=4 \end{matrix}$$

$$A=\iint dA=\iint dy\,dx=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

Όμως: $A=\iint_D dA=\iint_D dx\,dy=\iint_{D_1} dx\,dy+\iint_{D_2} dx\,dy=\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy+\int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy=\dots=\frac{9}{2}$

Παρατήρηση

1) Με αυτόν τον τρόπο μπορώ να συνδέσω και να αποσυνδέσω ολοκληρώματα. Δηλαδή απέδειξα ότι $\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx=\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy+\int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy$.

2) Ανάλογα με την γεωμετρία του χωρίου, μπορεί να προτιμάται ένα σύστημα συντεταγμένων έναντι ενός άλλου. Για παράδειγμα για κυκλικά χωρία προτιμούνται οι πολικές συντεταγμένες.

3) Αλλαγή μεταβλητής σε πολλαπλά ολοκληρώματα γίνεται __ΜΟΝΟ__ με χρήση Ιακωβιανής ορίζουσας. Δηλαδή αν $x=g(u,v)$, $y=f(u,v)$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad \iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} F[g(u,v), f(u,v)]\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

Πολικές συντεταγμένες

$x = r\cos\theta$ $\quad J = r$

$y = r\sin\theta$

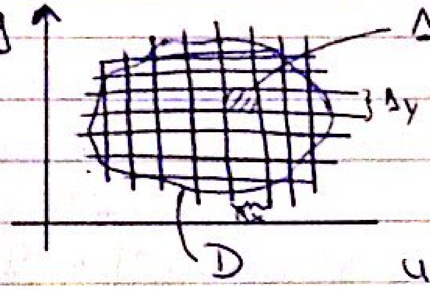
Κυλινδρικές συντεταγμένες

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$ $\quad J = r$

$z = z$

Πυκνότητα και μάζα



Θεωρούμε ένα λεπτό επίπεδο σχήμα, κάποιου υλικού γνωστού εμβαδού A, ορίζουμε τη πυκνότητα μάζας ως τον τρόπο που κατανέμεται η μάζα στο εμβαδό A.

*(Σύμφωνα στα στοιχειώδη εμβαδά η κατανομή δεν αλλάζει)

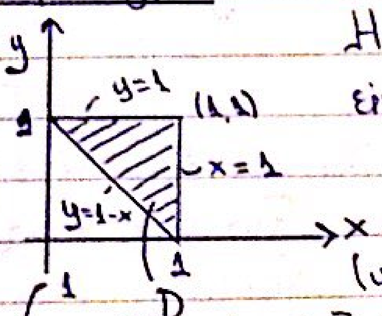
Γνωρίζοντας τη πυκνότητα μάζας p.

$p = \frac{\Delta m}{\Delta A}$ ← στοιχειώδη μάζα, ← στοιχειώδη εμβαδό (θεωρούμε η πυκνότητα σταθερή).

$\Delta m = p\Delta A$, δηλαδή η μάζα $m = \iint_D p(x,y)\,dA$.

Αν η πυκνότητα είναι σταθερή σε όλο το A, δηλαδή $p(x,y) = p \in \mathbb{R}$ τότε $m = pA$.

Παράδειγμα



Η πυκνότητα που κατανέμεται η μάζα του τριγώνου είναι $p(x,y) = xy$.

$$m = \iint_D p(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\,dy\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{1-x}^{1} \right) dx =$$

(κόβω κάθετα).

$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\left[1 - (1-x)^2\right] dx = \int_0^1 \frac{x}{2}(2x - x^2)\,dx = \frac{5}{24}$$

Άσκηση

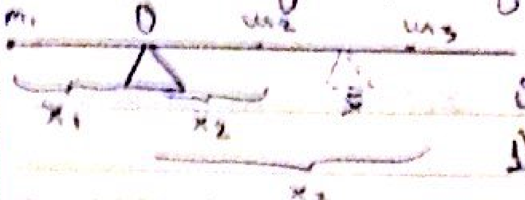
Να υπολογιστεί η μάζα με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης

Παρατήρηση

Με τον ίδιο τρόπο στον ηλεκτρομαγνητισμό μπορώ να υπολογίσω φορτία.

Κέντρο Μάζας

Θεωρούμε τρεις μάζες m_1, m_2, m_3 που προσδένονται σε ένα ακλόνητο άξονα, ο άξονας στηρίζεται σε ένα υπομόχλιο. και θα το πούμε σημείο μηδέν. Τα προβλήματα που πρέπει να απαντήσουμε είναι δύο:



1) Γνωρίζοντας τις μάζες m_1, m_2, m_3 και τις συντεταγμένες τους x_1, x_2, x_3 θέλω να βρω το σημείο O ώστε ο άξονας να ισορροπεί. 2) Γνωρίζοντας τις μάζες m_1, m_2, m_3 και τις συντεταγμένες του σημείου O θέλω να βρω τα σημεία x_1, x_2, x_3 ώστε να ισορροπεί ο άξονας. Το σημείο ισορροπίας O καλείται κέντρο μάζας του συστήματος.

Παρατήρηση

Πολλά φυσικά συστήματα συμπεριφέρονται ως υλικά σημεία θεωρώντας όλη τη μάζα τους συγκεντρωμένη στο κέντρο της μάζας τους. Άρα έχει μεγάλη σημασία να γνωρίζουμε το σημείο αυτό.

Κάθε μάζα στο υπομόχλιο θέλει να στρέψει τον άξονα λόγω του βάρους της. Η επίδραση αυτή ονομάζεται ροπή (moment) και είναι $M_i = m_i g x_i$. Η συνολική ροπή του συστήματος θα είναι $M = \sum_i m_i g x_i = g \sum_i m_i x_i$. Έστω $\bar{x}$ το κέντρο μάζας ή κέντρο ισορροπίας. Η συνολική ροπή ως προς το $\bar{x}$ θα είναι $M = g \sum_i m_i (x_i - \bar{x}) = 0$ (1). (προκειμένου να ισορροπεί). Στο σημείο ισορροπίας ή κέντρο μάζας το σύνολο των ροπών μηδενίζεται.

$$(1) \Rightarrow \sum_i m_i (x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow \sum_i m_i x_i - \sum_i m_i \bar{x} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i x_i - \bar{x} \sum_i m_i = 0$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

Παρατηρήσεις

1) Η εξίσωση είναι διαστατικά ορθή, στον αριθμητή έχω μάζα επί απόσταση ενώ στον παρονομαστή μάζα. Το συνολικό πηλίκο αντιστοιχεί σε απόσταση.

2) Τα σημεία x_i είναι οι συντεταγμένες των μαζών και όχι η απόστασή τους από το μηδέν, δηλαδή έχουν πρόσημο.

Παράδειγμα

Έστω δύο μάζες $m_1 = m_2 = m$ σε απόσταση $x_1 = -x_0$, $x_2 = +x_0$. Να βρεθεί το κέντρο μάζας.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(-x_0) + m(x_0)}{2m} = 0.$$

Αν ήταν x_0 απόσταση $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0$ τότε $\bar{x} = \frac{2mx_0}{2m} = x_0$ που είναι λάθος καθώς θα ισορροπήσουν.

Άσκηση

Σε ένα σύστημα n μαζών τοποθετώ τις μάζες με γεωμετρική πρόοδο από το σημείο O, αν οι μάζες είναι ίσες να βρεθεί το κέντρο μάζας.